ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 23, No. 2, 1976

IMAGE D'UNE SOMME D'OPERATEURS MONOTONES ET APPLICATIONS

BY

HAÏM BREZIS ET ALAIN HARAUX

ABSTRACT

Let A and B be monotone (multivalued) operators in a Hilbert space H. The paper deals with the relations between the range $R(A+B)$ of $A+B$ and the algebraic sum of the ranges of A and B, $R(A)+R(B)$.

Introduction

Soient A et B deux opérateurs monotones dans un espace de Hilbert H. On se propose de comparer les ensembles $R(A+B)=\bigcup_u(Au+Bu)$ et $R(A)+R(B)=\bigcup_{v,w}(Av+Bw)$. Il est clair qu'en général $R(A)+R(B)$ est un ensemble bien plus "gros" que $R(A+B)$ (par exemple dans $H=\mathbf{R}^2$ on a, avec $A=$ rotation de $+\pi/2$ et $B=$ rotation de $-\pi/2$, $R(A+B)=\{0\}$ et $R(A)+R(B)=H$). On montre néanmoins que, moyennant des hypothèses simples, les ensembles $R(A+B)$ et $R(A)+R(B)$ sont "à peu près" égaux, $R(A+B)\simeq R(A)+R(B)$), au sens suivant: $\overline{R(A+B)}=\overline{R(A)+R(B)}$ et $\operatorname{Int}[R(A+B)]=\operatorname{Int}[R(A)+R(B)]$. Au Paragraphe 1 on introduit la propriété $(*)$. Cette propriété qui est vérifiée en particulier par les gradients de fonctions convexes, joue un rôle important dans la suite. Au Paragraphe 2 on présente plusieurs cas où $R(A+B)\simeq(R(A)+R(B))$. Au Paragraphe 3 on applique ces résultats à l'étude de divers problèmes non linéaires. On met en évidence des conditions suffisantes et "presque" nécéssaires pour la résolubilité de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires.

1. La propriété $(*)$

Soit H un espace de Hilbert sur R; rappelons qu'une application multivoque $A: H\to\mathcal{P}(H)$ est dite monotone si elle vérifie

Received October 1, 1975

$$(f-g,x-y)\geqq 0 \text{ pour tout } [x,f]\in G(A),[y,g]\in G(A).$$

Nous introduisons la propriété suivante qui joue un rôle important dans la suite. On dit qu'un opérateur monotone A vérifie $(*)$ si

$$\forall f\in R(A) \text{ et } \forall y\in D(A) \quad \operatorname*{Sup}_{[z,h]\in G(A)} (h-f,y-z)<\infty.$$

Notons que lorsque A est univoque, la propriété $(*)$ s'écrit

$$\forall x\in D(A),\forall y\in D(A)\exists C(x,y) \text{ tel que}$$
$$\forall z\in D(A) \quad (Az-Ax,z-y)\geqq C(x,y).$$

Observons que si A vérifie $(*)$, alors on a en fait une propriété plus forte:

$$\forall f\in \text{ conv } R(A) \text{ et } \forall y\in \text{ conv } D(A) \quad \operatorname*{Sup}_{[z,h]\in G(A)} (h-f,y-z)<\infty.$$

En effet, soit $f=\Sigma\, t_if_i$ et $y=\Sigma\, s_jy_j$ avec $t_i\geqq 0, s_j\geqq 0$, $\Sigma_i t_i=\Sigma_j s_j=1$. Posons

$$c_{ij}=\operatorname*{Sup}_{[z,h]\in G(A)} (h-f_i,y_j-z).$$

On a donc, pour tout $[z,h]\in G(A)$

$$\sum_{i,j} t_is_j(h-f_i,y_j-z)\leqq \sum_{i,j} t_is_jc_{ij}$$

i.e.

$$(h-f,y-z)\leqq \sum_{i,j} t_is_jc_{ij}.$$

Indiquons quelques exemples simples d'opérateurs vérifiant $(*)$.

Exemple 1. Un opérateur monotone est dit σ-angleborné (cf. [3]) s'il existe une constante $\sigma>0$ telle que

$$(h-f,y-z)\leqq \sigma(f-g,x-y)$$

pour tout $[x,f]\in G(A),[y,g]\in G(A)$ et $[z,h]\in G(A)$[1].

[1] Lorsque A est linéaire, cette définition équivaut à $\forall x,z\in D(A)$, $(Ax,z)\leqq \sigma(Ax,x)+(Az,z)$, ou encore. $\forall x,z\in D(A)$, $(Ax,z)\leqq 2\sqrt{\sigma}(Ax,x)^{\frac12}(Az,z)^{\frac12}$.

Il est clair que tout opérateur σ-angleborné vérifie $(*)$. En particulier, les opérateurs trimonotones, et donc les sous-différentiels de fonctions convexes vérifient $(*)$ (ils sont σ-anglebornés avec $\sigma = 1$).

Remarquons que si $A = \partial\varphi$, alors A vérifie une propriété plus forte que $(*)$, à savoir

$$\forall f \in D(\varphi^*) \text{ et } \forall y \in D(\varphi) \quad \operatorname*{Sup}_{[z,h]\in G(A)} (h-f, y-z) < \infty.$$

En effet pour $[z,h] \in G(A)$, on a

$$\varphi(y) - \varphi(z) \geqq (h, y-z) = (h-f, y-z) + (f, y-z)$$

et donc

$$(h-f, y-z) \leqq \varphi(y) - \varphi(z) - (f, y) + (f, z) \leqq \varphi(y) + \varphi^*(f) - (f, y).$$

Exemple 2. Un opérateur A est dit coercif si $D(A)$ est borné ou bien

$$\forall y \in D(A) \quad \lim_{\substack{[z,h]\in G(A)\\ |z|\to+\infty}} \frac{(h, z-y)}{|z|} = +\infty$$

(i.e.

$$\forall y \in D(A) \quad \lim_{\substack{z\in D(A)\\ |z|\to+\infty}} \frac{(Az, z-y)}{|z|} = +\infty$$

lorsque A est univoque).

Tout opérateur coercif vérifie $(*)$. En effet $y \in D(A)$ et $f \in R(A)$ étant donnés il existe R tel que pour $[z,h] \in G(A)$ avec $|z| \geqq R$ on a $(h-f, y-z) \leqq 0$.

Enfin, pour $|z| < R$ on a

$$(h-f, y-z) \leqq (g-f, y-z) \leqq (|g| + |f|)(|y| + R) \quad (\text{où } g \in Ay).$$

En particulier si A est monotone, $A + \varepsilon I$ vérifie $(*)$ pout tout $\varepsilon > 0$.

Exemple 3. Il est clair que si A vérifie $(*)$, alors A^{-1} vérifie $(*)$. En particulier si A est maximal monotone, alors $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ et $A_\lambda = (A^{-1} + \lambda I)^{-1}$ vérifient $(*)$ pour tout $\lambda > 0$. Si A est un opérateur maximal monotone tel que $R(A)$ est borné, alors A vérifie $(*)$.

Le cas linéaire. Soit A: $D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire monotone (univoque) de graphe fermé.

PROPOSITION 1. *A vérifie $(*)$ si et seulement si A satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes:*

Il existe une constante C telle que $\forall u \in D(A)$, $\forall v \in D(A)$

1) $(Au, u - v) \geqq -C(|v|^2 + |Av|^2)$
2) $(Au - Av, u) \geqq -C(|v|^2 + |Av|^2)$
3) $|(Au, v)| \leqq 2\sqrt{C}\,(Au, v)^{1/2}(|v|^2 + |Av|^2)^{1/2}$
4) $|(Au, v)| \leqq 2\sqrt{C}\,(Au, v)^{1/2}(|u|^2 + |Au|^2)^{1/2}$.

DEMONSTRATION. L'équivalence entre (1) et (3) (ainsi que entre (2) et (4)) est évidente par passage à la forme polaire. L'équivalence entre (1) et (2) est immédiate en prenant $u - v = \tilde{u}$. Il résulte de (1) que l'on a

$$\begin{aligned}(Az - Ax, z - y) &= (A(z - x), (z - x) - (y - x)) \\ &\geqq -C(|y - x|^2 + |A(y - x)|^2);\end{aligned}$$

d'où $(*)$.

Montrons enfin que la propriété $(*)$ implique (4). En effet, pour chaque $z \in D(A)$, la fonction définie sur $D(A)$ par $x \mapsto (Ax, z) - (Az, z)$ est affine et continue pour la norme du graphe. Donc la fonction

$$G(x) = \operatorname*{Sup}_{z \in D(A)} \{(Ax, z) - (Az, z)\}$$

est convexe s.c.i. sur $D(A)$ muni de la norme du graphe. L'hypothèse $(*)$, avec $y = 0$, implique que $G(x) < +\infty$ pour tout $x \in D(A)$. Il en résulte que G est continu sur $D(A)$ muni de la norme du graphe. En particulier, il existe $\rho > 0$ et M tels que $|x|^2 + |Ax|^2 \leqq \rho^2 \Rightarrow G(x) \leqq M$.

Par conséquent, pour tout $y \in D(A)$, $y \neq 0$ et $z \in D(A)$ on a

$$\frac{\rho(Ay, z)}{(|y|^2 + |Ay|^2)^{1/2}} \leqq M + (Az, z).$$

Remplaçant z par λz il vient

$$\rho\,|(Ay, z)| \leqq 2\sqrt{M}(Az, z)^{1/2}(|y|^2 + |Ay|^2)^{1/2}, \text{ i.e. } (4).$$

REMARQUE 1. Soit A un opérateur antisymétrique i.e. $D(A)$ dense, $D(A) \subset D(A)^*$ et $A^* = -A$ sur $D(A)$. Alors A vérifie $(*)$ si et seulement si $A = 0$. En particulier, dans $H = \mathbf{R}^2$, une rotation de $\pi/2$ est un exemple d'opérateur ne vérifiant pas $(*)$.

Lorsque A est un opérateur linéaire monotone et *borné* de H dans H, alors la propriété (*) peut être formulée de manière très simple

Proposition 2. *Soit A un opérateur linéaire monotone et borné de H dans H. Alors A vérifie $(*)$ si et seulement si A satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes:*

Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$5)\quad \forall u, v \in H \qquad (Au, u - v) \geqq -\frac{1}{4\alpha} | v |^2$$

$$6)\quad \forall u \in H \qquad (Au, u) \geqq \alpha \, | Au |^2.$$

Demonstration. D'après la Proposition 1, $(*)$ implique (1) et par suite (5) lorsque A est borné. D'autre part (5) implique (6) par passage à la forme polaire $(u \mapsto \lambda u)$. Enfin partant de (6) on a

$$(Au, v) \leqq | Au | \; | v | \leqq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (Au, u)^{1/2} | v | \leqq (Au, u) + \frac{1}{4\alpha} | v |^2.$$

Remarque 2. On retrouve ainsi un résultat connu (cf. [5]): les opérateurs linéaires anglebornés et bornés vérifient (6). Par ailleurs, la propriété (6) équivaut à

$$(6^*) \qquad \forall u \in H \qquad (A^* u, u) \geqq \alpha \, | A^* u |^2$$

puisque (5) est manifestement stable par passage à A^* (ce résultat est démontré dans [6] par une méthode plus compliquée).

Remarque 3.

a) Tout opérateur linéaire A monotone borné à image fermée, vérifiant $(*)$ est angle borné. En effet on a $R(A) = N(A)^{\perp}$ et $A_1 = A_{|R(A)}$ est bijectif, à inverse continu de $R(A)$ sur $R(A)$ (théorème du graphe fermé).

D'après (6), on a pour tout $u \in R(A)$

$$(Au, u) \geqq \alpha \, | Au |^2 = \alpha \, | A_1 u |^2 \geqq \beta \, | u |^2 \quad \text{avec } \beta > 0.$$

Si $x, y \in H$, posons $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in R(A)$ et $x_2, y_2 \in N(A)$.

On a

$$(Ax, y) = (Ax_1, y_1) \leqq |Ax_1| |y_1| \leqq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (Ax_1, x_1)^{1/2} |y_1|$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} (Ax_1, x_1)^{1/2} (Ay_1, y_1)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} (Ax, x)^{1/2} (Ay, y)^{1/2}$$

i.e. A est angleborné.

b) En *dimension infinie*, il existe des opérateurs linéaires monotones bornés vérifiant ($*$) (ou en (6)) qui ne sont pas anglebornés (cf. par exemple [5]). Nous allons construire ici deux exemples d'opérateurs linéaires monotones A et B tels que:

— A est borné et A_λ n'est pas angleborné pour $\lambda > 0$,

— $B + \lambda I$ est non borné et non angleborné.

Soit $H = l^2$ de base $(e_i)_{i \geqq 1}$ et soit $(b_i)_{i \geqq 1}$ une suite de réels, $b_i > 0$, telle que $\lim_{i \to \infty} b_i = +\infty$.

Posons $B(e_{2i}) = -b_i e_{2i-1}$ et $B(e_{2i-1}) = b_i e_{2i}$ pour $i \geqq 1$, i.e. $B(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots) = (-b_1 x_2, b_1 x_1, -b_2 x_4, b_2 x_3 \cdots)$ avec $D(B) = \{x \in l^2; \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) < \infty\}$. $A = B^{-1}$ est défini par

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots) = \left(\frac{1}{b_1} x_2, -\frac{1}{b_1} x_1, \frac{1}{b_2} x_4, -\frac{1}{b_2} x_3, \cdots \right)$$

et par suite A est borné. Donc A et B sont maximaux monotones. Notons que $\forall x \in D(B)$, $(Bx, x) = 0$ et $(B^\lambda x, x) = \lambda |x|^2$ où $B^\lambda = B + \lambda I$, $\lambda > 0$. Vérifions que B^λ n'est pas angleborné; sinon il existerait une constante K telle que $\forall x, y \in D(B)$

$$|(B^\lambda x, y)| \leqq K (B^\lambda x, x)^{1/2} (B^\lambda y, y)^{1/2} = K\lambda |x| \; |y|,$$

et par suite B serait borné. Enfin $A^\lambda = (B^\lambda)^{-1}$ n'est pas angleborné (les anglebornés étant stables par inversion).

2. Etude de l'image $R(A + B)$ d'une somme d'opérateurs monotones

Soient A et B deux opérateurs monotones; nous établissons que dans un grand nombre de situations $R(A + B) \simeq R(A) + R(B)$ au sens suivant:

$$\overline{R(A+B)}=\overline{R(A)+R(B)} \text{ et } \mathrm{Int}[R(A+B)]=\mathrm{Int}[R(A)+R(B)].$$

Nous distinguerons les cas suivants:

2.1) A et B vérifient $(*)$

2.2) B vérifie $(*)$ et $D(A)\subset D(B)$

2.3) $A=\partial\varphi$ et $\varphi((I+\lambda B)^{-1}\cdot)\leqq\varphi(\cdot)$.

Commençons par un lemme qui sera utile par la suite.

Lemme 1. *Soit C un opérateur maximal monotone dans H et soit $F\subset H$ vérifiant*

$$\forall f\in F \quad \exists a\in H \text{ tel que } \sup_{[z,h]\in G(C)}(h-f,a-z)<\infty. \tag{7}$$

Alors $\mathrm{conv}\, F\subset\overline{R(C)}$ *et* $\mathrm{Int}(\mathrm{conv}\, F)\subset R(C)$

Remarque 4. L'hypothèse (7) étant satisfaite avec $F=R(C)$ on en déduit que $\mathrm{conv}\, R(C)\subset\overline{R(C)}$ ($\Rightarrow \overline{R(C)}$ convexe) et $\mathrm{Int}(\mathrm{conv}\, R(C))\subset R(C)$ ($\Rightarrow \mathrm{Int}\, R(C)$ convexe). On retrouve ainsi des résultats bien connus.

Demonstration du lemme 1. Soit $\tilde F=\mathrm{conv}\, F$; alors $\tilde F$ vérifie aussi l'hypothèse (7). En effet, soit $\tilde f=\Sigma\, t_i f_i$ avec $t_i\geqq 0$, $\Sigma\, t_i=1$ et $f_i\in F$. Il existe $a_i\in H$ et $c_i\in\mathbf{R}$ tels que

$$\forall[z,h]\in G(C) \quad (h-f_i,a_i-z)\leqq c_i$$

i.e.

$$(h,a_i)-(h,z)+(f_i,z)\leqq c_i+(f_i,a_i).$$

Posant $\tilde a=\Sigma\, t_i a_i$, il vient

$$(h,\tilde a)-(h,z)+(\tilde f,z)\leqq\sum t_i c_i+\sum t_i(f_i,a_i).$$

Par suite $(h-\tilde f,\tilde a-z)\leqq c$.

On est ainsi ramené à montrer que sous l'hypothèse (7)

$$F\subset\overline{R(C)} \text{ et } \mathrm{Int}\, F\subset R(C).$$

Soit $f\in F$ et soit u_ε la solution de l'équation

$$\varepsilon u_\varepsilon+Cu_\varepsilon\ni f,\ \varepsilon>0. \tag{8}$$

Soient $a \in H$ et $c \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall [z, h] \in G(C) \qquad (h - f, a - z) \leqq c.$$

Prenons $z = u_\varepsilon$, $h = f - \varepsilon u_\varepsilon$; il vient donc $(\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - a) \leqq c$ et par conséquent $\frac{1}{2}\varepsilon \mid u_\varepsilon \mid^2 \leqq \frac{1}{2}\varepsilon \mid a \mid^2 + c$. Il en résulte que $\sqrt{\varepsilon} \mid u_\varepsilon \mid$ est borné quand $\varepsilon \to 0$. D'où $f \in \overline{R(C)}$.

Supposons maintenant que $f \in \operatorname{Int} F$ et soit $\rho > 0$ tel que $B(f, \rho) \subset F$. Donc, pour tout $w \in H$ avec $\mid w \mid < \rho$, il existe $a(w) \in H$ et $c(w) \in R$ tels que $\forall [z, h] \in G(C)$, $(h - f - w, a(w) - z) \leqq c(w)$. Soit u_ε la solution de (8); prenons $z = u_\varepsilon$ et $h = f - \varepsilon u_\varepsilon$; il vient donc $(-\varepsilon u_\varepsilon - w, a(w) - u_\varepsilon) \leqq c(w)$. Par conséquent $(w, u_\varepsilon) \leqq c(w) + \frac{1}{2}\varepsilon \mid a(w) \mid^2 + (w, a(w))$. Il en résulte que (w, u_ε) reste borné, quand $\varepsilon \to 0$, par une constante dépendant de w. Le théorème de Banach-Steinhaus permet néanmoins de conclure que u_ε reste borné quand $\varepsilon \to 0$. Soit $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup u$; comme $f - \varepsilon u_\varepsilon \in C(u_\varepsilon)$ et $f - \varepsilon u_\varepsilon \to f$ on déduit de la maximalité de C que $f \in Cu$ i.e. $f \in R(C)$.

Remarque 5. La conclusion du Lemme 1 est encore valable sous une hypothèse bien plus faible que (7).

Ainsi si $\dim H < \infty$, il suffit de supposer

$$(7') \qquad \forall f \in F, \exists a \in H \text{ tel que } \limsup_{\substack{[z, h] \in G(C) \\ |z| \to +\infty}} \frac{(h - f, a - z)}{|z|} \leqq 0$$

pour que la conclusion du Lemme 1 subsiste.

Si $\dim H = \infty$, (7') implique $\operatorname{conv} F \subset \overline{R(C)}$; nous ne savons pas si (7') implique $\operatorname{Int} \operatorname{conv} F \subset R(C)$.

Néanmoins si on fait l'hypothèse

$$(7'') \qquad \text{il existe } \omega : H \to R_+ \text{ tel que } \lim_{|u| \to \infty} \frac{\omega(u)}{|u|} = 0 \text{ et}$$

$$\forall f \in F, \exists a \in H \text{ tel que } \limsup_{\substack{[z, h] \in G(C) \\ |z| \to +\infty}} \frac{(h - f, a - z)}{\omega(z)} < +\infty$$

alors on a $\operatorname{Int} \operatorname{conv} F \subset R(C)$.

En effet, on peut se ramener d'abord au cas où F est convexe. Soit u_ε la solution de (8). Si $\mid u_{\varepsilon_n} \mid \to \infty$, on peut prendre dans (7') $z = u_{\varepsilon_n}$, $h = f - \varepsilon_n u_{\varepsilon_n}$, ce qui conduit à $\limsup \varepsilon_n \mid u_{\varepsilon_n} \mid \leqq 0$ et établit $\operatorname{conv} F \subset \overline{R(C)}$.

Supposons maintenant que $f \in \operatorname{Int} F$. Si $\mid u_{\varepsilon_n} \mid \to \infty$, (7') implique que $u_{\varepsilon_n} / \mid u_{\varepsilon_n} \mid$ converge faiblement vers 0. Ceci permet de conclure lorsque $\dim H < \infty$. Si

$|u_{\varepsilon_n}| \to \infty$, (7″) implique que $u_{\varepsilon_n}/\omega(u_{\varepsilon_n})$ est borné, ce qui est absurde car $|u_{\varepsilon_n}|/\omega(u_{\varepsilon_n}) \to \infty$.

REMARQUE 6. Dans la conclusion du Lemme 1, on peut remplacer l'intérieur par l'intérieur relatif. Plus précisément, pour $X \subset H$, posons $\operatorname{Rint} X =$ intérieur de X dans l'espace affine fermé engendré par X et $\operatorname{Vect} X =$ espace vectoriel fermé engendré par $X - X$.

LEMME 1′. *Soit C un opérateur maximal monotone dans H et soit $F \subset H$ vérifiant* (7) *et $R(C) \subset \bar{F}$. Alors* $\operatorname{Rint}(\operatorname{conv} F) \subset R(C)$.

En effet, soit $f \in \operatorname{Rint}(\operatorname{conv} F)$; donc il existe $\rho > 0$ tel que $\forall w \in \operatorname{Vect}(\operatorname{conv} F)$ et $|w| < \rho$, alors $f + w \in \operatorname{conv} F$. Reprenant la démonstration du Lemme 1, on aboutit à (u_ε, w) borné pour tout $w \in \operatorname{Vect}(\operatorname{conv} F)$. Or $u_\varepsilon \in (1/\varepsilon)(f - Cu_\varepsilon) \subset (1/\varepsilon)\,(\operatorname{conv} F - R(C)) \subset \operatorname{Vect}(\operatorname{conv} F)$. Appliquant Banach-Steinhaus dans $\operatorname{Vect}(\operatorname{conv} F)$ on conclut que u_ε reste borné quand $\varepsilon \to 0$.

2.1. *Cas où A et B vérifient* $(*)$.

THEOREME 3. *Soient A et B deux opérateurs monotones dans H, vérifiant* $(*)$ *et tels que $A + B$ soit maximal monotone. Alors $R(A + B) \simeq R(A) + R(B)$.*

DEMONSTRATION. Il est clair que $R(A + B) \subset R(A) + R(B)$. Appliquons le Lemme 1 avec $C = A + B$ et $F = R(A) + R(B)$. L'hypothèse (7) est vérifiée; en effet soit $a \in D(A) \cap D(B)$ fixé et soit $f \in R(A) + R(B)$ i.e. $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in R(A)$ et $f_2 \in R(B)$. Appliquant $(*)$ on a

$$\operatorname*{Sup}_{[z, h_1] \in G(A)} (h_1 - f_1, a - z) < \infty$$

$$\operatorname*{Sup}_{[z, h_2] \in G(B)} (h_2 - f_2, a - z) < \infty.$$

Par suite

$$\operatorname*{Sup}_{[z, h] \in G(C)} (h - f, a - z) < \infty.$$

Variantes et généralisations du Théorème 3.

1°) Supposons que A et B soient monotones, vérifient $(*)$ et que $\overline{A + B}$ (fermeture du graphe de $A + B$ dans $H \times H$) soit maximal monotone. Alors $\overline{R(A + B)} = \overline{R(A) + R(B)}$ et $\operatorname{Int}[R(A) + R(B)] \subset R(\overline{A + B})$. Pour l'établir, il suffit de reprendre la démonstration du Théorème 3 avec $C = \overline{A + B}$.

2°) Supposons que A et B soient monotones, vérifient $(*)$ et que $A+B$ soit maximal monotone. Alors $R(A+B) \simeq \operatorname{conv} R(A) + \operatorname{conv} R(B)$. Reprenant la démonstration du Théorème 3, on obtient en fait $\operatorname{conv}[R(A)+R(B)] \subset \overline{R(A+B)}$ ainsi que $\operatorname{Int} \operatorname{conv}[R(A)+R(B)] \subset R(A+B)$. On utilise enfin l'égalité $\operatorname{conv}(X+Y) = \operatorname{conv} X + \operatorname{conv} Y$ valable pour tout $X, Y \subset H$. Notons que si l'on applique le Lemme 1′ au lieu du Lemme 1 on obtient même $\operatorname{Rint}(\operatorname{conv} R(A) + \operatorname{conv} R(B)) \subset R(A+B)$.[2]

3°) Considérons le cas où $A = \partial\varphi$ et $B = \partial\psi$ avec φ et ψ fonctions convexes s.c.i. telles que $D(\varphi) \cap D(\psi) \neq \varnothing$.

Notons d'abord que

$$D(\varphi^*) + D(\psi^*) \subset D((\varphi+\psi)^*).$$

En effet si $f \in D(\varphi^*)$ et $g \in D(\psi^*)$, on a

$$\forall x \in H, (f,x) - \varphi(x) \leqq \varphi^*(f) \quad \text{et} \quad (g,x) - \psi(x) \leqq \psi^*(g).$$

Donc $(\varphi+\psi)^* \; (f+g) \leqq \varphi^*(f) + \psi^*(g)$. Il en résulte en particulier que

$$R(A) + R(B) \subset D(\varphi^*) + D(\psi^*) \subset \overline{R(\partial(\varphi+\psi))}$$

et

$$\operatorname{Int}[R(A)+R(B)] \subset \operatorname{Int}[D(\varphi^*)+D(\psi^*)] \subset \operatorname{Int}[R(\partial(\varphi+\psi)].$$

Nous se savons pas si, dans ce cas $R(\partial\varphi) + R(\partial\psi) \simeq R(\partial(\varphi+\psi))$. Néanmoins lorsque $A+B$ est maximal monotone on a $\partial(\varphi+\psi) = \partial\varphi + \partial\psi$ et donc

$$R(A) + R(B) \simeq D(\varphi^*) + D(\psi^*) \simeq R(A+B).$$

REMARQUE 7. La conclusion du Théorème 3 ne peut pas être "localisée". Si $\Omega \neq H$, $(A+B)(\Omega)$ est en général beaucoup plus petit que $A(\Omega)+B(\Omega)$. Considérons par exemple dans $H = \mathbf{R}^2$, $A(x_1,x_2) = (x_1,x_2)$, $B(x_1,x_2) = (x_1,0)$ et $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2; x_1 + x_2 < 0\}$. On a $A(\Omega)+B(\Omega) = \mathbf{R}^2$ et $(A+B)(\Omega) = \{y \in \mathbf{R}^2; \frac{1}{2}y_1 + y_2 < 0\}$.

2.2. *Cas où B vérifie $(*)$ et $D(A) \subset D(B)$.*

THEOREME 4. *Soient A et B deux opérateurs monotones tels que $A+B$ soit maximal monotone. On suppose que B vérifie $(*)$ et que $D(A) \subset D(B)$. Alors $R(A+B) \simeq R(A)+R(B)$.*

[2] En particulier si A et B sont des opérateurs linéaires monotones vérifiant $(*)$ tels que $A+B$ soit maximal monotone et que $R(A)+R(B)$ soit fermé, alors $R(A+B) = R(A)+R(B)$.

DEMONSTRATION. Il est clair que $R(A+B)\subset R(A)+R(B)$. Appliquons le Lemme 1 avec $C=A+B$ et $F=R(A)+R(B)$. L'hypothèse (7) est vérifiée; en effet soit $f=f_1+f_2$ avec $f_1\in R(A)$ et $f_2\in R(B)$. Soit $a\in D(A)\subset D(B)$ tel que $f_1\in Aa$.

D'après la monotonie de A on a $\forall[z,h_1]\in G(A)$

$$(h_1-f_1,z-a)\geqq 0.$$

La propriété $(*)$ implique l'existence de $c\in\mathbf{R}$ tel que $\forall[z,h_2]\in G(B)$

$$(h_2-f_2,z-a)\geqq -c.$$

Par addition on obtient $\forall[z,h]\in G(A+B)$

$$(h-f,z-a)\geqq -c.$$

Appliquant le Théorème 4, on voit que si A et B sont deux opérateurs maximaux monotones tels que $D(B)=H$ et B vérifie $(*)$ alors $R(A+B)\simeq R(A)+R(B)$. ($A+B$ est maximal monotone: cf., par exemple, [1, corol. 2.7].) En particulier:

a) Si A et B sont maximaux monotones, $D(B)=H$ et $R(B)$ est borné, alors $R(A+B)\simeq R(A)+R(B)$ (cf. Exemple 3). En fait, il n'est pas nécéssaire de supposer que $R(B)$ est borné, mais seulement que $\lim_{|u|\to\infty}|B^\circ u|/|u|=0$. Il suffit de reprendre le démonstration du Théorème 4 et d'appliquer la Remarque 5 au lieu du Lemme 1 (cette généralisation a été suggérée par H. Amann).

b) Si A et B sont maximaux monotones avec $D(B)=H$ et

$$\forall u,v\in H\quad (Bu-Bv,u-v)\geqq\lambda\,|Bu-Bv|^2\quad(\lambda>0)$$

alors $R(A+B)\simeq R(A)+R(B)$. Il en résulte par exemple que si A et B sont deux opérateurs maximaux monotones, alors $\forall\lambda>0$

$$R(A+B_\lambda)\simeq R(A)+R(B_\lambda)=R(A)+R(B)$$

(noter que $R(B_\lambda)=R(B)$ puisque si $f\in Bu$ on a $B_\lambda(u+\lambda f)=f$).

REMARQUE 8. L'hypothèse $D(A)\subset D(B)$ est essentielle pour la conclusion du Théorème 4. Considérons dans $H=\mathbf{R}^2$ l'exemple suivant:

$$A=\text{ rotation } +\frac{\pi}{2}\text{ et } B=\partial I_M\text{ où } M=\mathbf{R}\times\{0\}$$

(I_M désigne la fonction indicatrice de M).

Donc $R(A)=\mathbf{R}^2$, $R(B)=\{0\}\times\mathbf{R}$, $R(A)+R(B)=\mathbf{R}^2$ tandis que $R(A+B)=\{0\}\times\mathbf{R}$.

Variantes et généralisations.

1°) Comme au Paragraphe 2.1, on peut remplacer dans le Théorème 4 l'hypothèse $(A+B)$ maximal monotone par $\overline{A+B}$ maximal monotone. La conclusion devient alors $\overline{R(A+B)}=\overline{R(A)+R(B)}$ et $\operatorname{Int}[R(A)+R(B)]\subset R(\overline{A+B})$.

2°) Soient A et B deux opérateurs monotones tels que $A+B$ soit maximal monotone. On suppose que B vérifie $(*)$ et que $D(A)\subset \operatorname{conv} D(B)$;

$$\text{alors } R(A+B)\simeq \operatorname{conv} R(A)+\operatorname{conv} R(B).$$

Reprenant la démonstration du Théorème 4, on voit que l'hypothèse (7) est encore vérifiée. En effet on a maintenant $a\in \operatorname{conv} D(B)$; il suffit alors d'utiliser l'observation qui suit la définition de la propriété $(*)$. On conclut que

$$\operatorname{conv}[R(A)+R(B)]\subset\overline{R(A+B)} \text{ et } \operatorname{Int}\operatorname{conv}[R(A)+R(B)]\subset R(A+B);$$

plus précisément on a même $\operatorname{Rint}\operatorname{conv}[R(A)+R(B)]\subset R(A+B)$.

3°) Soit A un opérateur monotone et soit $B=\partial\psi$ avec $A+B$ maximal monotone. On suppose que $D(A)\subset D(\psi)$; alors

$$R(A+B)\simeq \operatorname{conv} R(A)+D(\psi^*).$$

En effet on peut appliquer le Lemme 1 avec $F=R(A)+D(\psi^*)$. L'hypothèse (7) est satisfaite puisque $a\in D(\psi)$ et $f_2\in D(\psi^*)$ impliquent $\operatorname{Sup}_{[z,h_2]\in G(B)}(h_2-f_2,a-z)<\infty$ (cf. l'observation faite à l'Example 1 du Paragraphe 1). Il en résulte que $\operatorname{conv}[R(A)+D(\psi^*)]\subset\overline{R(A+B)}$ et $\operatorname{Int}\operatorname{conv}[R(A)+D(\psi^*)]\subset R(A+B)$.

2.3. *Cas où $A=\partial\varphi$ et $\varphi((I+\lambda B)^{-1}\cdot)\leqq\varphi(\cdot)$.*

Theoreme 5. *Soit $A=\partial\varphi$ avec φ convexe s.c.i. et soit B un opérateur maximal monotone tel que*

$$\forall u\in H \text{ et } \forall\lambda>0 \quad \varphi((I+\lambda B)^{-1}u)\leqq\varphi(u). \tag{9}$$

Alors $R(A+B)\simeq R(A)+R(B)$.

Demonstration. On sait que, sous l'hypothèse (9), $A+B$ est maximal monotone (cf., par exemple, [1, p. 48]). Pour $f\in H$ et $0<\varepsilon<1$ fixés, on considère d'abord la solution u_λ de l'équation

$$\varepsilon u_\lambda + Au_\lambda + B_\lambda u_\lambda \ni f.$$

On a donc

$$(10) \qquad \forall v \in H \quad \varphi(v) - \varphi(u_\lambda) \geqq (f - \varepsilon u_\lambda - B_\lambda u_\lambda, v - u_\lambda).$$

Choisissant $v = (I + \lambda B)^{-1} u_\lambda$ dans (10) on obtient grâce à (9)

$$(B_\lambda u_\lambda + \varepsilon u_\lambda - f, B_\lambda u_\lambda) \leqq 0.$$

Par conséquent $|B_\lambda u_\lambda| \leqq \varepsilon |u_\lambda| + |f|$.

Fixons ensuite dans (10) $v = v_0 \in D(B) \cap D(\varphi)$ (l'hypothèse (9) implique $D(B) \cap D(\varphi) \neq \emptyset$). On obtient alors

$$\varphi(v_0) - \varphi(u_\lambda) \geqq (f - \varepsilon u_\lambda - B_\lambda u_\lambda, v_0 - u_\lambda) \geqq (f - \varepsilon u_\lambda - B_\lambda v_0, v_0 - u_\lambda).$$

Il en résulte que

$$\varepsilon |u_\lambda|^2 \leqq C_1 + C_2 |u_\lambda| \quad \text{et par suite} \quad \varepsilon |u_\lambda| \leqq C_3,$$

où C_1, C_2 et C_3 dépendent seulement de φ, v_0, Bv_0 et $|f|$.

Passant à la limite lorsque $\lambda \to 0$[3] on obtient ainsi une solution u_ε de l'équation

$$(11) \qquad \varepsilon u_\varepsilon + A u_\varepsilon + B u_\varepsilon \ni f,$$

ou plus précisément $\varepsilon u_\varepsilon + g_\varepsilon + h_\varepsilon = f$ avec $g_\varepsilon \in A u_\varepsilon$, $h_\varepsilon \in B u_\varepsilon$ $|h_\varepsilon| \leqq C_3 + |f|$, $\varepsilon |u_\varepsilon| \leqq C_3$.

Supposons maintenant que $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in Aa$ et $f_2 \in Bb$. Appliquant la monotonie de A et B on obtient

$$(g_\varepsilon - f_1, u_\varepsilon - a) \geqq 0 \quad \text{et} \quad (h_\varepsilon - f_2, u_\varepsilon - b) \geqq 0.$$

Par addition il vient

$$-\varepsilon |u_\varepsilon|^2 - (g_\varepsilon - f_1, a) - (h_\varepsilon - f_2, b) \geqq 0$$

i.e. $\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \leqq C_4$ indépendant de ε. Il en résulte que $f \in \overline{R(A+B)}$. Enfin si $f \in \operatorname{Int}[R(A) + R(B)]$, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $w \in H$ avec $|w| < \rho$ on a une décomposition $f + w = f_1(w) + f_2(w)$ avec $f_1(w) \in A(a(w))$ et $f_2(w) \in B(b(w))$.

Comme précédemment, il vient

$$\varepsilon |u_\varepsilon|^2 + (u_\varepsilon, w) \leqq -(g_\varepsilon - f_1(w), a(w)) - (h_\varepsilon - f_2(w), b(w)) \leqq C_5(w).$$

On conclut que u_ε reste borné quand $\varepsilon \to 0$; donc $f \in R(A+B)$.

[3] Pour justifier ce passage à la limite, cf., par exemple, le théor. 2.4 de [1].

Généralisation.

1) Sous les hypothèses du Théorème 5 on a en fait

$$D(\varphi^*) + \operatorname{conv} R(B) \simeq R(A+B).$$

Il est clair que $\overline{D(\varphi^*) + \operatorname{conv} R(B)} = \overline{R(A+B)}$. Supposons maintenant que $f \in \operatorname{Int}[D(\varphi^*) + \operatorname{conv} R(B))]$. Il existe donc $\rho > 0$ tel que pour tout $w \in H$ avec $|w| < \rho$ on a une décomposition $f + w = f_1(w) + f_2(w)$ avec $f_1(w) \in D(\varphi^*)$ et $f_2(w) = \Sigma t_i h_i$, $t_i \geqq 0$, $\Sigma t_i = 1$, $h_i \in Bb_i$. Soit enfin u_ε la solution de (11) et fixons $a \in D(\varphi)$. On a alors

$$\varphi(u_\varepsilon) + \varphi^*(f_1(w)) \geqq (f_1(w), u_\varepsilon)$$

$$\varphi(a) - \varphi(u_\varepsilon) \geqq (g_\varepsilon, a - u_\varepsilon).$$

D'où par addition

$$\varphi(a) + \varphi^*(f_1(w)) \geqq (w - f_2(w) + \varepsilon u_\varepsilon + h_\varepsilon, u_\varepsilon) + (g_\varepsilon, a). \tag{12}$$

Enfin, par monotonie de B on a pour chaque i

$$(h_\varepsilon - h_i, u_\varepsilon - b_i) \geqq 0$$

i.e.

$$(h_\varepsilon, u_\varepsilon) - (h_\varepsilon, b_i) - (h_i, u_\varepsilon) + (h_i, b_i) \geqq 0.$$

D'où l'on déduit

$$(h_\varepsilon, u_\varepsilon) - (h_\varepsilon, b) - (f_2(w), u_\varepsilon) + \sum t_i (h_i, b_i) \geqq 0 \quad \text{où} \quad b = \sum t_i b_i. \tag{13}$$

Combinant (12) et (13) on obtient finalement que (w, u_ε) borné, pour tout $w \in H$, quand $\varepsilon \to 0$. On conclut alors que $f \in R(A+B)$. Le même argument montre en fait que

$$\operatorname{Rint}[D(\varphi^*) + \operatorname{conv} R(B)] \subset R(A+B).$$

2) Avec une démonstration analogue à celle du Théorème 5, on établit le résultat suivant. Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones vérifiant: Il existe C tel que

$$\forall [u, f] \in G(A) \text{ et } \forall \lambda > 0 \qquad (f, B_\lambda u) \geqq C.$$

Alors $A + B$ est maximal monotone et $R(A+B) \simeq R(A) + R(B)$.

COROLLAIRE 6. *Soit $A = \partial\varphi$ avec φ convexe s.c.i. et soit B un opérateur linéaire maximal monotone tel que $R(B)$ soit fermé. Soit N le noyau de B et soit P_N a projection orthogonale sur N. On fait l'hypothèse* (9). *Etant donné $f \in H$, les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(14) *Il existe $\rho > 0$ et $M < +\infty$ tels que* $\forall v \in N \ \varphi(v) - (f, v) \geqq \rho \,|\, v \,| - M$

$$P_N f \in \operatorname{Int}_N(D(\varphi^*) \cap N) \tag{15}$$

$$f \in \operatorname{Int}[R(A) + R(B)]. \tag{16}$$

DEMONSTRATION. Rappelons tout d'abord que $R(B) = N^{\perp}$. Notons ensuite que pour tout $u \in H$, $\lim_{\lambda \to +\infty}(I + \lambda B)^{-1}u = P_N u$ et grâce à (9) on a donc

$$\forall u \in H, \varphi(P_N u) \leqq \varphi(u). \tag{17}$$

Il en résulte que

$$\forall v \in H \qquad \varphi^*(P_N v) \leqq \varphi^*(v). \tag{18}$$

En effet

$$\varphi^*(v) = \operatorname*{Sup}_{u \in H}\{(v, u) - \varphi(u)\} \geqq \operatorname*{Sup}_{u \in H}\{(v, P_N u) - \varphi(P_N u)\}$$

$$\geqq \operatorname*{Sup}_{u \in H}\{(v, P_N u) - \varphi(u)\} = \varphi^*(P_N v).$$

On déduit de (18) que $P_N D(\varphi^*) = D(\varphi^*) \cap N$.

(14) $\Rightarrow$ (15). On a $\forall v \in H$

$$\varphi(v) \geqq \varphi(P_N v) \geqq (f, P_N v) + \rho \,|\, P_N v \,| - M.$$

En particulier $P_N f \in D(\varphi^*)$, et on a même

$$P_N f + (B_\rho \cap N) \subset D(\varphi^*) \quad \text{i.e. } (15).$$

(15) $\Rightarrow$ (16). L'hypothèse (15) s'écrit $P_N F + (B_\rho \cap N) \subset D(\varphi^*)$. Par conséquent $f + B_\rho \subset D(\varphi^*) + R(B)$, et la généralisation du Théorème 5 montre que $f \in \operatorname{Int}[R(A) + R(B)]$.

(16) $\Rightarrow$ (14). L'hypothèse (16) s'écrit $f + B_r \subset R(A) + R(B)$. Donc $f + B_r \subset D(\varphi^*) + N^{\perp}$, et par conséquent $P_N f + (B_r \cap N) \subset P_N D(\varphi^*) = D(\varphi^*) \cap N$. La fonction $\psi = \varphi^*|_N$ est convexe s.c.i. sur N et $P_N f$ est un point intérieur du

domaine de ψ. Il en résulte que ψ est bornée par M sur en voisinage $P_N f + (B_\rho \cap N)$ de $P_N f$ dans N. Or, pour $v \in H$ et $z \in H$ avec $|z| \leqq 1$ on a

$$\varphi(v) + \varphi^*(P_N f + \rho z) \geqq (v, P_N f) + \rho(v, z).$$

On conclut que pour tout $v \in H$

$$\varphi(v) \geqq (v, P_N f) + \rho\,|P_N v| - M.$$

3. Applications

3.1. *Equations intégrales de Hammerstein.*

Soient F et K deux opérateurs maximaux monotones de H dans H tels que $D(F) = D(K) = H$. On suppose que F *ou* K vérifie $(*)$. Alors, pour tout $f \in H$, il existe $u \in H$ solution de

$$u + KFu \ni f. \tag{19}$$

Si F vérifie $(*)$ on écrit (19) sous la forme

$$-K^{-1}(f - u) + Fu \ni 0$$

et on applique le Théorème 4 avec $Au = -K^{-1}(f-u)$ et $Bu = Fu$, de sorte que $R(A) = -D(K) = H$, $D(B) = H$ et par conséquent $R(A+B) = H$. Si K vérifie $(*)$ on écrit (19) sous la forme

$$F^{-1}(v) + Kv \ni f$$

et l'on pose $u \in F^{-1}(v)$. On applique alors le Théorème 4 avec $A = F^{-1}$ et $B = K$, de sorte que $R(A) = D(F) = H$ et $D(B) = D(K) = H$. On pourra trouver des résultats comparables dans [2], [3] et [4].

3.2. *Un problème de Neumann non linéaire.*

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert borné, de frontière régulière $\partial\Omega$; on désigne par n la normale extérieure. Soit β un graphe maximal monotone dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. On considère le problème suivant. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$ trouver $u \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{20}$$

Notons d'abord que si (20) admet une solution, on a nécessairement (par intégration):

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \beta(u(x))dx \in \overline{R(\beta)}$$

Inversement l'hypothèse

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx \in \operatorname{Int} R(\beta) \tag{21}$$

implique que le problème (20) admet une solution. Posons $H = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta$ avec $D(A) = \{u \in H^2(\Omega);\ \partial u/\partial n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$ de sorte que $A = \partial\varphi$ avec $\varphi(u) = \frac{1}{2}\Sigma\int_\Omega |\partial u/\partial x_i|^2 dx$ et $D(\varphi) = H^1(\Omega)$. Prenant $G(B) = \{[u, g] \in H \times H;$ $g(x) \in \beta(u(x))$ p.p. sur $\Omega\}$, on vérifie aisément que l'hypothèse (9) est satisfaite, et on peut alors appliquer le Théorème 5. Notons que, grâce à (21), $f \in \operatorname{Int}[R(A) + R(B)]$. En effet $f + w = f_1 + f_2$ avec $f_1 = f + w - (1/|\Omega|)\int_\Omega(f + w)dx$ et $f_2 = (1/|\Omega|)\int_\Omega(f + w)dx$; comme $\int_\Omega f_1 dx = 0$, on a $f_1 \in R(A)$, et d'autre part $f_2 \in R(B)$ pourvu que $\int_\Omega w\,dx$ soit assez petit. Donc $f + w \in R(A) + R(B)$ dès que $\|w\|_{L^2}$ est assez petit.

3.3. *Un problème de Dirichlet non linéaire à la résonance.*

Soit β un graphe maximal monotone dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tel que $0 \in D(\beta)$. Soit λ_1 la première valeur propre de $-\Delta$ avec conditions aux limites nulles, et soit v une fonction propre i.e. $-\Delta v = \lambda_1 v$ sur Ω, $v = 0$ sur $\partial\Omega$; on peut supposer que $v > 0$ sur Ω. Considérons le problème suivant: Etant donné $f \in L^2(\Omega)$ trouver $u \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u + \beta(u) \ni f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{22}$$

Multipliant (22) par v et intégrant on voit que si (22) admet une solution, on a nécessairement

$$\frac{\int_\Omega f v\,dx}{\int_\Omega v\,dx} \in \overline{R(\beta)}.$$

Inversement si l'on fait l'hypothèse

$$\frac{\int_\Omega f v\,dx}{\int_\Omega v\,dx} \in \operatorname{Int}\ R(\beta) \tag{23}$$

alors le problème (22) admet une solution. En effet, on peut appliquer le Théorème 3 avec $Au = -\Delta u - \lambda_1 u$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ et B

défini comme au Paragraphe 3.2. A et B sont des sous-différentiels (et donc vérifient $(*)$). D'autre part $A+B$ est maximal monotone et l'hypothèse (23) entraîne que $f \in \operatorname{Int}[R(A)+R(B)]$. En effet, on a $f+w=f_1+f_2$ avec

$$f_1=(f+w)-\frac{\int_\Omega (f+w)v\,dx}{\int_\Omega v\,dx} \quad \text{et} \quad f_2=\frac{\int_\Omega (f+w)\,v\,dx}{\int_\Omega v\,dx}.$$

Comme $\int_\Omega f_1 v\,dx=0$ on a $f_1 \in R(A)$; d'autre part $f_2 \in R(B)$ pourvu que $\int_\Omega wv dx$ soit assez petit. Par conséquent $f+w \in R(A)+R(B)$ dès que $\| w \|_{L^2}$ est assez petit.

3.4. *Un problème avec conditions aux limites non linéaires.*

Etant donné $f \in L^2(\partial\Omega)$, on cherche v vérifiant

$$\begin{cases} \Delta v=0 & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n}+\beta(v)\ni f & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{24}$$

Il est clair que si (24) admet une solution, on a nécessairement

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f\,d\sigma \in \overline{R(\beta)}.$$

Inversement si l'on fait l'hypothèse

$$\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} f\,d\sigma \in \operatorname{Int} R(\beta), \tag{25}$$

alors (24) admet une solution $v \in H^{3/2}(\Omega)$.

On travaille ici dans $H=L^2(\partial\Omega)$. L'opérateur A est défini de la manière suivante: Etant donné $u \in H^1(\partial\Omega)$, soit $\hat{u} \in H^{3/2}(\Omega)$ la solution de l'équation

$$\Delta\hat{u}=0 \text{ sur } \Omega, \hat{u}=u \text{ sur } \partial\Omega:$$

on pose $Au=\partial\hat{u}/\partial n$. Définissant B comme au Paragraphe 3.2, on peut alors appliquer le Théorème 5.

Remarque 9. Les problèmes (20), (22) et (24) ont été abordés par des méthodes tout à fait différentes dans [7], [8], [10] et [11].

3.5. *Une équation d'évolution nonlinéaire périodique.*

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et soit j une fonction convexe s.c.i. sur $\mathscr{H}$. Etant donné $f \in H=L^2(0,T;\mathscr{H})$ on cherche $u(t)$ solution de

$$(26) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \partial j(u) \ni f & \text{sur }]0, T[\\ u(0) = u(T). \end{cases}$$

Notons d'abord que si (26) admet une solution on a nécessairement

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \in \overline{R(\partial j)}.$$

Inversement si $(1/T)\int_0^T f(t)\, dt \in \operatorname{Int} R(\partial j)$, alors (26) admet une solution.

En effet on peut appliquer le Théorème 5 avec $G(A) = \{[u, g] \in H \times H;$ $g(t) \in \partial j(u(t))$ p.p. sur $]0, T[\}$ de sorte que $A = \partial\varphi$ où $\varphi(u) = \int_0^T j(u(t))dt$ et $D(\varphi) = \{u \in H;\ j(u) \in L^1(0, T)\}$.

On prend

$$B = d/dt \text{ avec } D(B) = \{u \in H; du/dt \in H \text{ et } u(0) = u(T)\}.$$

Il est clair que B est maximal monotone et l'hypothèse (9) est aisée à vérifier. Enfin il est facile de voir que $f \in \operatorname{Int}[R(A) + R(B)]$ moyennant l'hypothèse $(1/T)\int_0^T f(t)dt \in \operatorname{Int} R(\partial j)$.

En particulier si β est un graphe maximal monotone dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \beta(u) \ni f & \text{sur } (0, T) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

admet une solution dès que $(1/T)$ $\int_0^T f(t)dt \in \operatorname{Int} R(\beta)$. Lorsque $\mathscr{H} = \mathbf{R}^2$ et $j(u) = k\,|u|$, on voit que (26) admet alors une solution dès que $|(1/T) \int_0^T f(t)dt| < k$. Ce problème est abordé par S. Maury [9] qui utilise une méthode très différente. Le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta(u) \ni f & \text{sur } \Omega \times (0, T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u(x, T) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

admet une solution dès que $(1/|Q|)\int_Q f(x, t)dx\, dt \in \operatorname{Int} R(\beta)$ où $Q = \Omega \times]0, T[$ (prendre ici $\partial j = -\Delta + \beta$ dans $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$ et déterminer $\operatorname{Int} R(\partial j)$ à l'aide des résultats du Paragraphe 3.2).

Appendice

Les résultats présentés dans cet appendice sont dûs à A. Pazy. Soient A et B deux opérateurs monotones dans un espace de Hilbert H, tels que $A+B$ soit maximal monotone. Etant donnés $f \in H$ et $\varepsilon > 0$ soit u_ε la solution de l'équation:

$$f = \varepsilon u_\varepsilon + a_\varepsilon + b_\varepsilon \quad \text{avec} \quad a_\varepsilon \in Au_\varepsilon, b_\varepsilon \in Bu_\varepsilon. \tag{1}$$

Comme $\varepsilon \mid u_\varepsilon \mid$ est borné lorsque $\varepsilon \to 0$, $\mid a_\varepsilon \mid$ et $\mid b_\varepsilon \mid$ sont tous les deux ou bien bornés ou bien non-bornés quand $\varepsilon \to 0$.

Proposition 1. a) *Soit* $f \in \overline{R(A)+R(B)}$. *Si* $\mid a_\varepsilon \mid \leqq C$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$ *alors* $f \in \overline{R(A+B)}$. b) *Soit* $f \in \operatorname{Int}[R(A)+R(B)]$. *Si* $\mid a_\varepsilon \mid \leqq C$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$ *alors* $f \in R(A+B)$.

Demonstration. a) Soit $f \in \overline{R(A)+R(B)}$. Pour tout $\delta > 0$, il existe un ξ, tel que, $\mid \xi \mid < \delta$ et

$$f + \xi = a + b \quad \text{avec} \quad a \in Au, b \in Bv \tag{2}$$

où u, v, a et b dépendent de ξ. On a alors

$$(\xi, u_\varepsilon - v) = (a + b - a_\varepsilon - b_\varepsilon - \varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon - v),$$

et en utilisant la monotonie de A et de B on obtient

$$\varepsilon \mid u_\varepsilon \mid^2 \leqq \varepsilon (u_\varepsilon, v) + (a_\varepsilon - a, v - u) + (\xi, v - u_\varepsilon).$$

Par conséquent

$$\varepsilon \mid u_\varepsilon \mid^2 \leqq C_1 \cdot \varepsilon \mid u_\varepsilon \mid + C_2 + \delta \mid u_\varepsilon \mid \tag{3}$$

où C_1 et C_2 dépendent de δ. Si $\mid u_\varepsilon \mid \leqq C$ quand $\varepsilon \to 0$ alors $\varepsilon \mid u_\varepsilon \mid \to 0$ et $f \in \overline{R(A+B)}$. Sinon, soit $\mid u_{\varepsilon_n} \mid \to \infty$, on en déduit grâce à (3) que $\limsup_{\varepsilon_n \to 0} \varepsilon_n \mid u_{\varepsilon_n} \mid \leqq \delta$, d'où $\varepsilon_n \mid u_{\varepsilon_n} \mid \to 0$ et $f \in \overline{R(A+B)}$.

b) Soit $f \in \operatorname{Int}[R(A)+R(B)]$, il existe alors un $\delta > 0$ tel que pour tout $w \in H$ avec $\mid w \mid \leqq \delta$ on a une décomposition

$$f + w = a + b \quad \text{avec} \quad a \in Au, b \in Bv$$

où u, v, a, et b dépendent de w. Appliquant la monotonie de B on obtient

$$0 \leqq (b - b_\varepsilon, v - u_\varepsilon) = (w + \varepsilon u_\varepsilon + a_\varepsilon - a, v - u_\varepsilon)$$

d'où

$$(w, u_\varepsilon) \leqq (w, v) + (a_\varepsilon - a, v - u) + \tfrac{1}{4}\varepsilon \mid v \mid^2.$$

Il en résulte que (w, u_ε) reste borné quand $\varepsilon \to 0$ pour tout $w \in H$, $|w| \leqq \delta$, fixé et grâce au théorème de Banach-Steinhaus on peut conclure que $|u_\varepsilon|$ reste borné lorsque $\varepsilon \to 0$. Soit $u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup x$; comme $f - \varepsilon_n u_{\varepsilon_n} \in (A+B)u_{\varepsilon_n}$ et $f - \varepsilon_n u_{\varepsilon_n} \to f$ on déduit de la maximalité de $A+B$ que $f \in (A+B)x$ i.e. $f \in R(A+B)$.

Une conséquence immédiate de la Proposition 1 est

COROLLAIRE 1. *Soient A et B deux opérateurs monotones tels que $A+B$ soit maximal monotone. Si pour tout $f \in R(A)+R(B)$, $|a_\varepsilon|$ reste borné lorsque $\varepsilon \to 0$, alors*

$$R(A+B) \simeq R(A)+R(B).$$

De ce corollaire nous déduisons le résultat suivant :

COROLLAIRE 2. *Soient A et B deux opérateurs maximaux monotones tels que B soit univoque, $D(B) \supset D(A)$ et il existe $k<1$ tel que*

$$|Bx| \leqq k\,|A^\circ x|$$

pour tout $x \in D(A)$. Alors $A+B$ est maximal monotone et

$$R(A+B) \simeq R(A)+R(B).$$

DEMONSTRATION. On sait que, sous les hypothèses du Corollaire 2, $A+B$ est maximal monotone (cf., par exemple, le corol. 2.6 de [1]). Soit $f \in H$; comme $A+B$ est maximal monotone, $\varepsilon\,|u_\varepsilon| \leqq C$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Il en résulte que

$$|a_\varepsilon| \leqq |f| + |\varepsilon u_\varepsilon| + |Bu_\varepsilon| \leqq C_1 + k\,|A^\circ u_\varepsilon| \leqq C_1 + k\,|a_\varepsilon|$$

ce qui implique $|a_\varepsilon| \leqq C$ pour tout $f \in H$.

REFERENCES

1. H. Brezis, *Opérateurs Maximaux Monotones*, Lecture Notes in Mathematics, North-Holland, 1973.

2. H. Brezis, F. Browder, *Some new results about Hammerstein equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 568–572.

3. H. Brezis, F. Browder, *Nonlinear integral equations and systems of Hammerstein type*, Advances in Math. **18** (1975), 115–147.

4. F. Browder, *Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type*, in *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, ed. E. Zarantonello, Acad. Press, 1971, pp. 425–500.

5. P. Hess, *On nonlinear equations of Hammerstein type in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **31** (1971), 308–312.

6. P. Hess, *A remark on a class of linear monotone operators*, Math. Z. **125** (1972), 104–106.

7. P. Hess, *On semi-coercive nonlinear problems*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1974), 645–654.

8. E. M. Landesman, A. C. Lazer, *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance*, J. Appl. Math. Mech. **19** (1970), 609–623.

9. S. Maury, *Un problème de frottement équivalent à un problème de poursuite: étude aymptotique*, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, exposé no. 8, 1973.

10. L. Nirenberg, *Generalized degree and nonlinear problems*, in *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, ed. E. Zarantonello, Acad. Press, 1971, pp. 1–10.

11. M. Schatzman, *Problèmes aux limites non linéaires, non coercifs*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **27** (1973), 641–686.

Université Paris VI
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05, France